

Prezzi e preferenze

[tratto da Calvete et al., The rank pricing problem: Models and branch-and-cut algorithms, Computers and Operations Research 105 (2019) 12–31]

Un venditore conosce i suoi prodotti e i suoi clienti. Ogni cliente ha un suo personale ordine di preferenza dei prodotti, ed il venditore lo conosce. Il venditore inoltre sa anche qual è il massimo prezzo che ogni cliente è disposto a pagare. Date queste informazioni, il venditore deve decidere il prezzo a cui mettere in vendita i prodotti. Egli sa che ogni cliente acquisterà il prodotto (uno solo) a cui attribuisce la massima preferenza, tra quelli il cui prezzo non eccede il massimo prezzo che il cliente è disposto a pagare.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati riportati nel file PREZZI.TXT.

Esempio.

I clienti sono 10 (indicizzati 1..10), i prodotti sono 5 (indicizzati A..E). La preferenza di ogni cliente è espressa da un numero da 1 a 5: 5 indica massima preferenza, 1 indica minima preferenza. Dove la preferenza manca, il cliente non intende comprare il prodotto, indipendentemente dal suo prezzo. Nell'ultima colonna della tabella è indicata la massima soglia di spesa (espressa in euro) per ogni cliente. La soglia è sempre un numero intero.

Clienti	Prodotti					Soglia
	A	B	C	D	E	
1	-	3	5	-	4	53
2	4	-	5	-	-	40
3	5	-	4	2	3	40
4	2	3	1	4	5	38
5	5	-	3	-	4	32
6	2	3	5	1	4	31
7	5	2	4	-	3	25
8	5	-	3	4	-	25
9	-	-	4	5	-	25
10	4	5	-	2	3	16

Soluzione.

Dati.

Sia C l'insieme indicizzato dei clienti; sia P l'insieme indicizzato dei prodotti; sia a_{cp} l'indice di preferenza per ogni coppia; sia m_c la soglia di spesa per ogni cliente $c \in C$.

Per disattivare i vincoli, è comodo calcolare il valore massimo tra le soglie: $M = \max_{i \in C} \{m_i\}$.

Variabili.

Indichiamo con $x_p \geq 0$ il prezzo di ogni prodotto $p \in P$.

Indichiamo con una variabile binaria w_{cp} se il prodotto $p \in P$ è acquistabile dal cliente $c \in C$ ($w_{cp} = 1$) o se è troppo costoso ($w_{cp} = 0$). Indichiamo con una variabile binaria z_{cp} la scelta del cliente $c \in C$ di acquistare il prodotto $p \in P$ ($z_{cp} = 1$). Indichiamo, infine, con $\alpha_{cp} \geq 0$ la somma eventualmente pagata dal cliente $c \in C$ per acquistare il prodotto $p \in P$.

Obiettivo.

L'obiettivo è massimizzare i ricavi ottenuti dalle vendite:

$$\text{maximize} \quad \sum_{c \in C, p \in P} \alpha_{cp}.$$

Vincoli.

I valori di α sono costretti a 0 quando corrispondono ad acquisti non effettuati. Quando il vincolo non è attivo, perché corrisponde ad un acquisto effettuato, la costante "grande abbastanza" è m_c .

$$\alpha_{cp} \leq m_c z_{cp} \quad \forall c \in C, p \in P.$$

In corrispondenza degli acquisti effettuati, il valore di α è limitato superiormente dal prezzo del prodotto.

$$\alpha_{cp} \leq x_p \quad \forall c \in C, p \in P.$$

Distinguendo i due vincoli, si evita di scrivere un unico insieme di vincoli

$$\alpha_{cp} \leq x_p z_{cp} \quad \forall c \in C, p \in P$$

che sarebbe non-lineare, a causa del prodotto tra le variabili continue x e le variabili binarie z .

Se il prodotto p è acquistabile dal cliente i ($w_{cp} = 1$) allora il prezzo x_p dev'essere minore o uguale alla soglia m_c :

$$x_p - m_c \leq (M - m_c)(1 - w_{cp})$$

Viceversa, se il prodotto p non è acquistabile dal cliente c ($w_{cp} = 0$) allora il suo prezzo x_p dev'essere strettamente maggiore della soglia m_c . Poiché è garantito che le soglie abbiano valori interi, si può formulare il vincolo come segue:

$$(m_c + 1)w_{cp} \geq (m_c + 1) - x_p \quad \forall p \in P, c \in C.$$

Può essere acquistato solo ciò che è acquistabile, cioè ha un prezzo sotto la soglia:

$$z_{cp} \leq w_{cp} \quad \forall c \in C, p \in P.$$

Non può essere effettuato più di un acquisto per ogni cliente:

$$\sum_{p \in P} z_{cp} \leq 1 \quad \forall c \in C.$$

Non si possono acquistare prodotti che sono fuori dal ranking delle preferenze del cliente. Per scrivere questo vincolo, supponiamo di sostituire con il valore 0 i valori di a_{cp} non specificati nei dati di ingresso.

$$z_{cp} = 0 \quad \forall c \in C, p \in P : a_{cp} = 0.$$

Per ogni cliente c , se il prodotto p è preferito rispetto al prodotto q ed è acquistabile, allora il prodotto q non è acquistato:

$$w_{cp} \leq 1 - z_{cq} \quad \forall c \in C, p \in P, q \in P : a_{cp} > a_{cq}.$$

Classificazione.

Il modello risultante è di Programmazione Lineare Intera. Quindi l'ottimalità della soluzione è garantita, l'unicità no.

Soluzione ottima.

La soluzione ottima dell'esempio proposto è la seguente:

$$x = [40 \ 16 \ 53 \ 25 \ 31].$$

Valore ottimo: 308.